НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА М-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ражабов У., Омонов О., Ризаев Р.,
Преподаватель Ташкентского государственного педагогического университета
Пирназаров Б., Жабборова Ф.
Студенты Ташкентского государственного педагогического университета
E-mail: o.i.omonov@mail.ru

Аннотация. В работе доказано, что если функция $f(z)$ M-гармонична в поликруге U^n, то функция $f^2(z)$ является M-субгармоничной. Кроме того, в случае $\tilde{\Delta} f = \tilde{\Delta} f^{\alpha} = 0$ $(\alpha \neq 0, \alpha \neq 1, \alpha \in \mathbb{R})$ доказано, что $f(z)$ является n-гармоничной функцией.

Annotation. It is proved in the paper that if a function $f(z)$ is M-harmonic in a polydisk U^n, then the function $f^2(z)$ is M-subharmonic. In addition, the case is $\tilde{\Delta} f = \tilde{\Delta} f^{\alpha} = 0$ $(\alpha \neq 0, \alpha \neq 1, \alpha \in \mathbb{R})$ proved to $f(z)$ be a n-harmonic function.

Ключевые слова: голоморфная функция, гармонические функции, субгармонические функции, n-гармоничные функции, n-субгармонинные функции, плюригармонические функции, плюрисубгармонические функции, M-гармонические функции, M-субгармонические функции.

Key words: holomorphic function, harmonic function, subharmonic function, n-harmonic function, n-subharmonic function, pluriharmonic function, plurisubharmonic function, M-harmonic function, M-subharmonic function.

1. Введение. Предположим, $B-$открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$ с центром в начале координат $\left(B = \left\{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\right\}, \partial B = \left\{\omega \in \mathbb{C}^n : |\omega| = 1\right\}\right)$, $\varphi_a(z)-$дробно-линейное биголоморное отображение шара B на себя следующего вида:

$$\varphi_a(z) = \frac{a - P_a(z) - \left(1 - |a|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(z - P_a(z)\right)}{1 - \langle z, a \rangle}.$$

При $a \in B$, $a \neq 0$, $\varphi_a(0) = a$, $\varphi_a(a) = 0$, $\varphi_0(z) = -z$, где угловые скобки обозначают эрмитово скалярное произведение $\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i$, $|z| = \langle z, z\rangle^{\frac{1}{2}}$, и $P_a(\mathrm{z}) = \frac{\langle z, a\rangle}{\langle a, a\rangle} a$, $a \neq 0$, $P_0(\mathrm{z}) = 0$. Очевидно, что $\varphi_a(0) = a$, $\varphi_a(a) = 0$.

Если $G = \{z \in \mathbb{C}^n : \langle z, a\rangle \neq 1\}$, то φ_a голоморфно отображает G в $\mathbb{C}^n$. Ясно, что $G \supset \bar{B}$, так как $|a| < 1$.

Инвариантный оператор Лапласа $\tilde{\Delta}$ функций на дважды гладких в B определяется следующим образом:

$\tilde{\Delta} f(z) = \Delta(f \circ \varphi_z)(0)$

где $z \in B$, $\Delta -$ обычный лапласиан [3: 54].

Оператор $\tilde{\Delta}$ называется инвариантным, потому что он коммутирует с автоморфизмами шара B в следующем смысле: $\tilde{\Delta}(f \circ \varphi) = (\tilde{\Delta} f) \circ \varphi$, где $f \in C^2(G)(G \subset B)$, а $\varphi -$ любой биголоморфный автоморфизм шара B.

Для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ обозначим через X_λ пространство всех функций $f \in C^2(B)(f \in C^2(U^n))$, удовлетворяющих уравнению

$\tilde{\Delta} f(z) = \lambda \cdot f(z)$

Случай $\lambda = 0$ наиболее интересен. Элементы пространства X_0 мы будем называть M-гармоническими функциями.

Определение 1. Пусть B-единичный шар в $\mathbb{C}^n$. Функция $f \in C^2(B)$ называется M-гармонической (M-субгармонической), если $\tilde{\Delta} f = 0$ $(\tilde{\Delta} f \geq 0)$, где $\Delta f = (1 - |z|^2)(\Delta f - 4\sum_{i,j=1}^{n} z_i \bar{z}_j \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_j})$ инвариантный лапласиан в B [3: 55].

Для поликруга $U^n \subset \mathbb{C}^n$ имеет место аналогичное определение.

Определение 2. Пусть $U^n -$единичный поликруг в $\mathbb{C}^n$ Функция $f \in C^2(U^n)$ называется M-гармонической (M-субгармонической) в U^n, если $\tilde{\Delta} f = 0$ $(\tilde{\Delta} f \geq 0)$, где $\Delta f = 2\sum_{j=1}^{n} \left(1 - |z_j|^2\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_j}$ инвариантный лапласиан в U^n [4: 24].

2. Основной часть.

Теорема 1. Если функция f M-гармоническая в U^n, то f^2 M-субгармоническая в U^n.

Теорема 2. Предположим, что $\tilde{\Delta} f = \tilde{\Delta} f^{\alpha} = 0$ $\left(\alpha \neq 0, \alpha \neq 1, \alpha \in \square\right)$ в $U^n \subset \square^n$, тогда $f(z)$ n-гармонична в U^n.

Литература

[1] Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. – М. Наука, 1971. – 432 с.

[2] Шабат Б.В. «Введение в комплексный анализ» Ч. 2. М. Наука. 1976.-321 с.

[3] Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\square^n$. // М. Мир. 1984.-457 с.

[4] Stoll M., Invariant potential theory in the unit ball of $\square^n$, London Mathematical Society Lecture Note Series, 199. Cambridge University Press, Cambridge. 2003.-181.

[5] Мадрахимов Р.М., Омонов О.И. Плюригармоничность M-гармонических функций, // Илм сарчашмалари – Урганч-2018-12, ст. 12-14.