INTERNATIONAL CONFERENCE ON
INTERDISCIPLINARY SCIENCE
Volume 02, Issue 09, 2025

О ПОТЕРЕ КОРНЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

Сюткина Светлана Михайловна
Преподаватель математики высшей категории академического лицея «International Business» Ташкентского государственного экономического университета, город Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *В данной статье рассказывается о методе решения тригонометрических уравнений, содержащих тангенсы и котангенсы, с помощью формул, приводящих к потере корней, в статье приведены формулы для решения уравнений и рассмотрены примеры решения уравнений с помощью этих формул.*
Ключевые слова: *тригонометрические уравнения, область определения уравнения, потеря корней, посторонние корни.*

Тригонометрические уравнения занимают одно из центральных мест в курсе математики академического лицея, а также старших классов средней школы. Они являются одним из сложных разделов курса математики. Связано это с разнообразием видов и способов решения тригонометрических уравнений. Умение решать тригонометрические уравнения необходимо учащимся для подготовки к выпускным, вступительным экзаменам, а также для подготовки к математическим олимпиадам.

В данной статье рассмотрим решение тригонометрических уравнений, содержащих тангенсы и котангенсы. При решении таких уравнений может произойти потеря корней или появление посторонних корней.

Рассмотрим решение тригонометрических уравнений, решаемых с помощью формул:

1) $tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$;

2) $tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$;

3) $tg2\alpha=\frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$; 4) $ctg\,\alpha=\frac{1}{tg\,\alpha}$;

5) $tg\,\alpha=\frac{1}{ctg\,\alpha}$.

Особенности этих формул состоят в том, что области определения их левых и правых частей различны. Так, для формул 1 и 2 левые части определены для всех α и β таких, что $\alpha\pm\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$, а правые – для $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \alpha\pm\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$. Для формулы 3 левая часть определена для всех $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$, а правая часть $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. Для формулы 4 левая часть определена для всех $\alpha\neq\pi n, n\in Z$, а правая часть для $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \alpha\neq\pi n$, $n\in Z$ и, наконец, для формулы 5 левая часть определена для всех $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$, а правая часть для $\alpha\neq\pi n, \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$.

Приведенный анализ указанных формул показывает, что при решении уравнений, в которых они применяются, при замене левой части на правую может произойти потеря некоторых решений, так как область определения правой части меньше области определения левой части. Таким образом, если пользоваться формулами 1 – 4, то могут потеряться решения вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$, а формулой 5 – решения вида $x = \pi n, n \in Z$.

Для того чтобы выяснить в каждом конкретном случае, происходит ли при применении этих формул потеря решений, достаточно выполнить подстановку указанных чисел в данные уравнения.

Рассмотрим следующие уравнения:

1) $1 + ctg\,x = tg\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$.

Воспользовавшись формулами 4 и 1, получим

$$1 + \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{tg\,x + tg\frac{3\pi}{4}}{1 - tg\,x \cdot tg\frac{3\pi}{4}},$$
$$\frac{tg\,x + 1}{tg\,\alpha} = \frac{tg\,x - 1}{1 + tg\,x}.$$

Перейдя от этого уравнения к алгебраическому, заменив $tg\,x$ на y. Получим уравнение $\frac{y+1}{y} = \frac{y-1}{y+1}$, корень которого $y = -\frac{1}{3}$,

т. е. $x = -arctg\,\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Так как мы применяли формулы 1 и 4, то необходимо проверить, являются ли корнями данного уравнения числа вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. Подставив их в уравнение, получим верное равенство

$$1 + ctg\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = tg\left(\frac{\pi}{2} + \pi n + \frac{3\pi}{4}\right), \qquad 1 + ctg\,\frac{\pi}{2} = tg\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right).$$

Следовательно, числа вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ являются корнями данного уравнения.

О т в е т: $-arctg\,\frac{1}{3} + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi n,\ k,\ n \in Z.$

2) $3tg\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = tg2x$.

Воспользовавшись формулой приведения и формулами 3 и 4, перейдем к уравнению

$$-3ctgx = \frac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}, \ \frac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} + \frac{3}{tgx} = 0.$$

Решая его, получим $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k,\ x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ k,\ n \in Z.$

Проверкой убеждаемся, что числа вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z$ обращают данное уравнение в верное равенство:

$$3tg2\pi = tg(\pi + 2\pi n).$$

О т в е т: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi n,\ k,\ n \in Z.$

3) $tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = tg\,2x + 1$.

Воспользовавшись формулами 2 и 3, получим

$$\frac{tg\,x - tg\frac{\pi}{4}}{1 + tg\,x \cdot tg\,\frac{\pi}{4}} = \frac{2tgx}{1 - tg^2x} + 1;$$
$$\frac{tg\,x - 1}{1 + tg\,x} = \frac{2tgx}{1 - tg^2x} + 1.$$

Устанавливаем, что это уравнение не имеет корней. При применении формул 2 и 3 возможна потеря решений вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. Непосредственная подстановка чисел этого вида в данное уравнение приводит к верному равенству.

О т в е т: $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

4) $tg\ 2x - 2 = 2tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Применив формулы 3 и 2, получим уравнение

$$\frac{tgx}{1 - tg^2 x} - 1 = \frac{tg\ x - 1}{1 + tg\ x},$$

откуда $x = \pi k, x = arctg\ \frac{1}{2} + \pi n, k,\ n \in Z$. Проверкой устанавливаем, что числа вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z$ не являются решениями данного уравнения.

О т в е т: $\pi k,\ arctg\ \frac{1}{2} + \pi n, k,\ n \in Z$.

5) $tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = tg\ x - 1$.

Применив формулу 1, получим уравнение

$$\frac{tg\ x + 1}{1 - tg\ x} = tg\ x - 1,$$

которое не имеет решений. Но возможно, числа вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ будут являться решениями данного уравнения. Проверим это. Левая часть уравнения равна $tg\ \frac{3\pi}{4} = -1$, а правая часть уравнения не имеет смысла.

О т в е т: уравнение решений не имеет.

6) $tg\ x = ctg\ x$.

Применив формулу 5, сведем уравнение к виду $\frac{1}{ctg\ x} = ctg\ x$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, x = \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ k,\ n \in Z$. Числа вида $x = \pi m, m \in Z$ не являются решениями данного уравнения.

О т в е т: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

Следующие уравнения можно решить по формулам 1 – 5:

1) $1 + tg\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = 2ctgx$. О т в е т: $arctg\frac{1}{2} + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi n,\ k,\ n \in Z$.

2) $tg\ 2x - 2 = 2tg\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)$. О т в е т: $-arctg2 + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi n,\ k,\ n \in Z$.

3) $tg\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = tg\ 2x + 1$. О т в е т: $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in Z$.

4) $tg\ 2x = tg\ x$. О т в е т: $\pi n,\ \ n \in Z$.

5) $tg\left(x + \frac{7\pi}{4}\right) - 1 = tg\ x$. О т в е т: решений нет.

6) $tg\ x = ctg^2 x$. О т в е т: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in Z$.

При решении этих уравнений использовались формулы 1 – 5 слева направо. Если применить эти формулы справа налево, то могут появиться посторонние корни.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА.

1. Сайдаматов Э., Аманов А. и др. «Алгебра и основы математического анализа» учебное пособие для академических лицеев. Ч. II. Т. «Ilm ziyo», 2013 г.

2. Алгебра и основы анализа. Под редакцией А.Н.Колмогорова. Учебное пособие для 10-11 классов. 1992г.
3. А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, Е. М. Рабинович, М. С. Якир. Тригонометрия: Задачник к школьному курсу. – М. : АСТ-ПРЕСС: Магистр-S, 1998. – 656 с.
4. В. С. Крамор: Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. – Москва. 1994 г.