О СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ.

Сюткина Светлана Михайловна
Преподаватель математики высшей категории академического лицея «International Business» Ташкентского государственного экономического университета,город Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *В данной статье рассмотрен способ решения тригонометрических неравенств, основанный на решении простейших тригонометрических уравнений.*

Ключевые слова: *простейшее тригонометрическое неравенство, единичная окружность, график тригонометрической функции, формула корней тригонометрического уравнения.*

Для решения простейших тригонометрических неравенств в учебниках алгебры используют единичную окружность или графики тригонометрических функций. Но не все учащиеся хорошо овладевают этими способами. В данной статье рассмотрим еще один способ решения тригонометрических неравенств, основанный на решении простейших тригонометрических уравнений.

Для нахождения решения тригонометрических неравенств можно довольно успешно применять формулы корней соответствующих уравнений следующим образом.

1. Решение неравенства $\sin x \gtrless a$.

Строим графики функций $y = \sin x$ и $y = a$ (рис.1). Затем записываем уравнение $\sin x = a$ и его решение $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$. Придавая n значения 0; 1; 2, находим три корня составленного уравнения:

$$x_0 = \arcsin a, \;\; x_1 = -\arcsin a + \pi, \;\; x_2 = \arcsin a + 2\pi.$$

Значения x_0, x_1, x_2 являются абсциссами трех последовательных точек пересечения графиков $y = \sin x$ и $y = a$. Очевидно, что всегда на интервале $(x_0; x_1)$ выполняется неравенство $\sin x > a$, а на интервале $(x_1; x_2)$ выполняется неравенство $\sin x < a$.

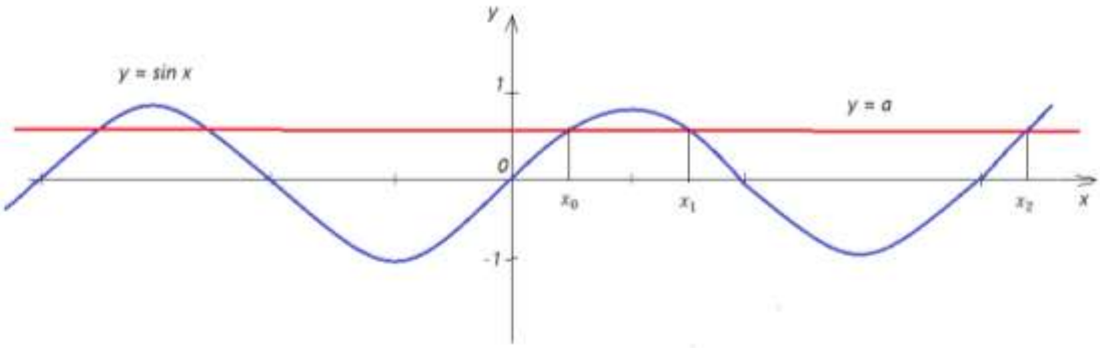

Рис. 1

Добавив к концам этих промежутков число кратное периоду синуса, в первом случае получим решение неравенства $\sin x\ > a$ в виде:

$$x_0 + 2\pi n\ < x\ < x_1 + 2\pi n, n \in Z;$$

а во втором случае – решение неравенства $\sin x\ < a$ в виде

$$x_1 + 2\pi n\ < x\ < x_2 + 2\pi n, n \in Z.$$

2. Решение неравенства $\cos x\ \gtreqless a.$

Аналогичные рассуждения проводим для косинуса (рис. 2). Только в отличие от синуса из формулы $x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z,$ являющейся решением уравнения $\cos x = a,$ при $n = 0$ получаем два корня $x_0 = -\arccos a,\ x_1 = \ \arccos a,$ а третий корень при $n = 1$ в виде $x_2 = -\arccos a + 2\pi.$

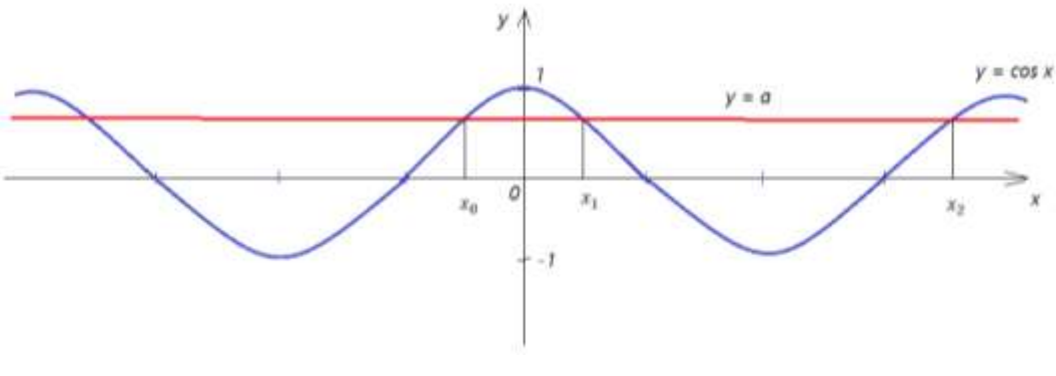

Рис. 2

И опять $x_0,\ x_1,\ x_2$ являются тремя последовательными абсциссами точек пересечения графиков $y = \cos x$ и $y = a.$ В интервале $(x_0;\ x_1)$ выполняется неравенство $\cos x > a,$ в интервале $(x_1;\ x_2)$ – неравенство $\cos x < a.$

Теперь нетрудно записать решения неравенств $\cos x > a$ и $\cos x < a.$ В первом случае получим:

$$x_0 + 2\pi n < x < x_1 + 2\pi n, n \in Z;$$

а во втором:

$$x_1 + 2\pi n < x < x_2 + 2\pi n, n \in Z.$$

Итак, *чтобы решить неравенство* $\sin x > a$ *или* $\cos x > a$, *надо составить соответствующее уравнение и решить его. Из полученной формулы найти корни* x_0 *и* x_1 *и записать ответ неравенства в виде:*

$$x_0 + 2\pi n < x < x_1 + 2\pi n, n \in Z.$$

При решении неравенств $\sin x < a$ и $\cos x < a$ *из формулы корней соответствующего уравнения находим корни* x_1 и x_2 *и записываем ответ неравенства в виде:*

$$x_1 + 2\pi n < x < x_2 + 2\pi n, n \in Z.$$

Изложенный в данной статье способ позволяет научить решать тригонометрические неравенства всех учащихся, так как этот способ полностью опирается на умения, которыми учащиеся владеют прочно. Это умения решать простейшие тригонометрические уравнения и находить значения переменной по формуле. Кроме того, становится совершенно необязательным тщательное решение под руководством учителя большого количества упражнений для того, чтобы продемонстрировать всевозможные приемы рассуждений в зависимости от знака неравенства, значения модуля числа a и его знака. Да и сам процесс решения неравенств становится кратким и, что очень важно, единообразным.

Еще одним преимуществом предложенного способа является то, что он позволяет легко решать неравенства даже в том случае, когда первая часть не является табличным значением синуса или косинуса. Продемонстрируем это на конкретном примере.

Пусть требуется решить неравенство $\sin x < \frac{1}{3}$. Составим соответствующее уравнение и решим его:

$$\sin x = \frac{1}{3}; \quad x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z.$$

Найдем значения x_1 и x_2.

При $n = 1$ $x_1 = -\arcsin\frac{1}{3} + \pi.$

При $n = 2 \;\; x_2 = \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi.$

Записываем окончательный ответ данного неравенства:

$-\arcsin\frac{1}{3} + \pi + 2\pi n < x < \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi + 2\pi n, n \epsilon Z$ или

$$-\arcsin\frac{1}{3} + \pi(2n+1) < x < \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi(n+1), n \epsilon Z.$$

Мастерство и навык решать тригонометрические неравенства в курсе алгебры и математического анализа, являются, несомненно, важными не только для усвоения курса математики, но и для дальнейшего процесса обучения. Каждый учащийся может поступить в ВУЗ, где обязательно понадобятся расширенные знания алгебры, в том числе тригонометрии.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА.

1. Сайдаматов Э., Аманов А. и др. «Алгебра и основы математического анализа» учебное пособие для академических лицеев. Ч. II. Т. «Ilm ziyo», 2013 г.
2. Алгебра и основы анализа. Под редакцией А.Н.Колмогорова. Учебное пособие для 10-11 классов. 1992г.
3. А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, Е. М. Рабинович, М. С. Якир. Тригонометрия: Задачник к школьному курсу. – М. : АСТ-ПРЕСС: Магистр-S, 1998. – 656 с.
4. В. С. Крамор: Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. – Москва. 1994 г.