# ANIQ INTEGRALLAR VA ULARNING AMALIY TADBIQLARI

**Nurmatov Elbek Rayimqul o'g'li**

Matematika ta'lim yo'nalishi, 4M-2022-guruh talabasi
*e-mail: nurmatovelbek426 @gmail.com*

**Annotatsiya.** Ushbu maqolada aniq integrallar nazariyasi, ularning asosiy xossalari va hisoblash usullari, shuningdek geometrik va fizik amaliy tadbiqlari ilmiy-uslubiy jihatdan tahlil qilingan. Newton-Leybnits formulasining markaziy ahamiyati, bo'laklab integrallash va o'zgaruvchilarni almashtirish usullari yoritilgan. Aniq integralning yuzalarni, egri chiziq yoyi uzunligini, aylanma jismlar hajmi va sirt yuzasini hisoblashdagi roli ko'rsatilgan. Fizikada o'zgaruvchan kuch ishi, inersiya momentlari va og'irlik markazi masalalari integral vositasida yechilganligi misollar asosida tasdiqlangan.
**Kalit so'zlar:** *aniq integral, Newton-Leybnits formulasi, egri chiziqli trapetsiya, inersiya momenti, og'irlik markazi, aylanma jism, matematik analiz.*

## 1. KIRISH

Zamonaviy fan va texnikaning jadal rivojlanishi matematikaning, xususan matematik analizning amaliy ahamiyatini tobora oshirmoqda. Aniq integral tushunchasi — differensial va integral hisobning asosi bo'lib, u nafaqat sof matematika, balki fizika, mexanika, muhandislik, iqtisodiyot va biologiya kabi ko'plab sohalarda keng qo'llaniladi [1].

O'zbekiston Respublikasi oliy ta'lim tizimida matematika ta'limini sifatli tashkil etish davlat siyosatining ustuvor yo'nalishlaridan biri sifatida belgilangan. Prezident Sh.M. Mirziyoyevning 2017-yil 20-apreldagi PQ-2909-son qarori asosida ta'lim sohasida tizimli islohotlar amalga oshirilmoqda, jumladan aniq fanlar bo'yicha o'qitish metodikasini takomillashtirish alohida e'tibor markazida turibdi [2].

Ushbu maqolaning maqsadi — aniq integralning nazariy asoslarini tizimli bayon etish, hisoblash usullarini qiyosiy tahlil qilish va ularning geometrik hamda fizik masalalardagi tatbiqlarini misollar orqali ko'rsatish, shuningdek bu mavzuni oliy ta'lim muassasalarida samarali o'qitishga yo'naltirilgan metodologik fikrlarni taqdim etish.

## 2. ANIQ INTEGRAL: TA'RIF VA ASOSIY XOSSALAR

### 2.1. Aniq integral tushunchasi

Aniq integral tushunchasiga olib keluvchi asosiy masala — egri chiziqli trapetsiya yuzasini hisoblash. [a, b] kesmada uzluksiz va manfiy bo'lmagan f(x) funksiya berilgan bo'lsin. Ushbu funksiya grafigi, Ox o'qi va x = a, x = b to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzasini topish masalasi integral yig'indisi vositasida quyidagicha ifodalanadi [3]:

$$S_n = \Sigma f(\xi_i) \cdot \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Bu yig'indining bo'linish diametri d → 0 bo'lgandagi limiti — agar mavjud bo'lsa — f(x) funksiyaning [a, b] kesmadagi aniq integrali deb ataladi va $\int_a^b f(x)dx$ bilan belgilanadi. Teorema bo'yicha, agar f(x) funksiya [a, b] kesmada uzluksiz bo'lsa, u integrallanuvchi, ya'ni uning aniq integrali mavjud [3].

**2.2. Aniq integralning asosiy xossalari**

Aniq integral quyidagi asosiy xossalarga ega bo'lib, ular amaliy hisob-kitoblarda keng qo'llaniladi:

1) O'zgarmas ko'paytuvchini tashqariga chiqarish: $\int_a^b kf(x)dx = \int_a^b kf(x)dx$

2) Qo'shiluvchilar bo'yicha ajratish:

$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

3) Kesma bo'yicha additivlik: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \pm \int_c^b f(x)dx, \ c \in [a, b]$

4) Baholash teoremasi: $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$

5) O'rta qiymat teoremasi: $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a), \ c \in [a, b]$

Bu xossalar aniq integrallarni soddalashtirish, baholash va turli algebraik amallar bajarishda asosiy qurol hisoblanadi [4].

**3. ANIQ INTEGRALNI HISOBLASH USULLARI**

**3.1. Newton-Leybnits formulasi**

Aniq integralning nazariy ta'rifi bo'yicha hisoblash — ya'ni integral yig'indisi limitini topish — amalda juda noqulay. Shu muammoni hal etuvchi Integral hisobning asosiy formulasi — Newton-Leybnits formulasi — aniq va noaniq integrallar orasidagi chuqur bog'lanishni namoyon etadi:

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

bu yerda $F(x)$ — $f(x)$ funksiyaning ibtidoiy funksiyasi. Formulaning isboti yuqori chegara o'zgaruvchan bo'lgan $\Phi(x) = \int_x^a f(t)dt$ dt integral yordamida amalga oshiriladi. 1-Teorema bo'yicha $\Phi'(x) = f(x)$, ya'ni $\Phi(x)$ — $f(x)$ ning ibtidoiy funksiyasi. 2-Teorema esa istalgan F(x) ibtidoiy funksiya uchun formulaning o'rinliligini isbotlaydi [3].

Misol: $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$. Bu natijani egri chiziqli trapetsiya yuzasi sifatida ham geometrik yo'l bilan tasdiqlash mumkin.

**3.2. Bo'laklab integrallash usuli**

Bo'laklab integrallash formulasi differensiallash qoidasidan kelib chiqadi: $\int_a^b u\,dv = uv|_0^0 - \int_a^b v\ du$. Bu usul integrand funksiya mahsulot ko'rinishida bo'lgan hollarda — xususan algebraik va trigonometrik funksiyalar ko'paytmasini integrallashda — samarali qo'llaniladi [4].

Misol: $\int_0^{\pi/2} \mathrm{x}\cos(x)\,dx$. $u = x, dv = cos(x)dx$ deb olamiz, $du = dx, v = sin(x)$. Unda: $L[x \cdot sin(x)]|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx = \frac{\pi}{2} + \cos(x)|_0^0 = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2}$.

**3.3. O'zgaruvchilarni almashtirish usuli**

Agar $x = \varphi(t)$ almashtirilsa, chegaralar ham $\alpha = \varphi^{-1}(a), \beta = \varphi^{-1}(b)$ ga almashadi: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t) \cdot \varphi'(t)dt$. Bu usul murakkab integrandlarni soddalashtirish uchun juda qulay [3].

Misol: $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$ $x = sin(t), dx = cos(t)\,dt$; $\alpha = 0, \beta = \pi/2$ deb olamiz: $\int_0^{\pi/2} cos^2(t)\,dt = \frac{\pi}{4}$. Bu natija geometrik ma'noga ega — bu birli doiraning chorak yuzasi.

**4. ANIQ INTEGRALNING GEOMETRIK TADBIQLARI**

**4.1. Yuzalarni hisoblash**

Ox o'qidan yuqorida joylashgan $y = f(x) \geq 0$ funksiya grafigi, $x = a, x = b$ to'g'ri chiziqlar va Ox o'qi bilan chegaralangan shaklning yuzasi: $S = \int_a^b f(x)\,dx$. Agar $[a, b]$ kesmada ikkita $y_1 = f_1(x) \geq f_2(x) = y_2$ funksiya orasidagi soha hisoblanayotgan bo'lsa: $S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$ [5].

Misol: $y = sin(x)$ va $y = 0$ orasidagi $[0, \pi]$ kesmadagi yuzani topamiz: $S = \int_0^\pi sin(x)\,dx = [-cos(x)]|_0^\pi = 1 + 1 = 2$ kv. birlik.

**4.2. Egri chiziq yoyi uzunligi**

y = f(x) funksiya grafigining [a, b] kesmadagi yoy uzunligi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$$

Parametrik shaklda berilgan $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ egri chiziq uchun: $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$ dt. Masalan, astroyda $x = a \cdot cos^3 t, y = a \cdot sin^3 t$ uchun to'liq uzunlik l = 6a [5].

**4.3. Aylanma jismlar hajmi va sirti**

y = f(x) funksiya grafigining Ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmi: $V = \pi \int_a^b f(x)$. Bir xil ko'rinishda, aylanma jismning yon sirti yuzasi: $S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{(1 + [f'(x)]^2) dx}$ [5].

Muhim misollar: 1) $y = \frac{Rx}{h}$ to'g'ri chiziqni Ox atrofida aylantirish — konusni hosil qiladi, $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$; 2) $x^2 + y^2 = R^2$ yarim doirani aylantirish — sharni hosil qiladi, $V = 4\pi R^3/3$. Bu natijalar maktab geometriya formulalari bilan to'liq mos keladi [6].

**5. ANIQ INTEGRALNING FIZIK TADBIQLARI**

**5.1. O'zgaruvchan kuch bajargan ish**

Mexanikaning fundamental qonunlaridan biri — o'zgaruvchan $F(x)$ kuchning $[a, b]$ yo'lda bajargan ishi aniq integral yordamida hisoblanadi: A $=\int_a^b$ F(x) dx. Bu formula, masalan, elastik kuch (Guk qonuni: F = kx) yoki gravitatsion kuch kabi o'zgaruvchan kuchlar uchun bemalol qo'llaniladi [7].

**5.2. Statik moment va og'irlik markazi**

Bir jinsli $y = f(x)$ egri chiziq yoyining Ox va Oy o'qlarga nisbatan statik momentlari: $Mx = \int L\, y \cdot ds, My = \int L\, x \cdot ds\, n$, bu yerda $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ dx. Og'irlik markazi koordinatalari: $\bar{x} = My/L, \bar{y} = Mx/L, L$ — yoy uzunligi [6].

Misol: r radiusli doiraning chorak yoyining og'irlik markazi: $\bar{y} = \bar{x} = 2r/\pi \approx 0.637r$. Bu natija simmetrilik va integral hisobi birgalikda qo'llanilishining yorqin namunasidir.

**5.3. Inersiya momenti**

Bir jinsli tekis egri chiziqning Ox o'qiga nisbatan inersiya momenti: $Ix = \int L\, y^2 \cdot ds$. Bir jinsli r radiusli yarim doiraning o'z diametriga nisbatan inersiya momenti: $Ix = \frac{\pi r^3}{2}$. Ellipsning har ikki yarim o'qiga nisbatan inersiya momentlari: $Ix = Iy = \frac{\pi a b^3}{4}$ [7].

Inersiya momentlari muhandislik hisoblarida — ayniqsa konstruktsiyalar mustahkamligini baholashda — hal qiluvchi ahamiyatga ega. Aniq integral bu katagoriyani yagona analitik usul bilan hisoblash imkonini beradi.

**6. MAVZUNI O'QITISH METODIKASI BO'YICHA TAVSIYALAR**

Aniq integral mavzusini o'qitishda quyidagi metodologik yondashuv samarali natija beradi:

Birinchi bosqich — motivatsiya. Mavzuni geometrik muammodan boshlash tavsiya etiladi: egri chiziqli trapetsiya yuzasini qanday hisoblash mumkin? Bu savol talabalarda tabiiy qiziqish uyg'otadi va integral yig'indisi tushunchasini organik ravishda kiritish imkonini beradi.

Ikkinchi bosqich — nazariy asos. Newton-Leybnits formulasi faqat hisoblash qoidasi sifatida emas, balki differensial va integral hisobning birligini namoyon etuvchi chuqur matematik haqiqat sifatida taqdim etilishi zarur. Formulaning isboti o'rta chegara o'zgaruvchan integral funksiyasi $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ orqali bajarilishi ko'rinishini tushuntirish zarur [8].

Uchinchi bosqich — ko'nikmalar shakllantirish. Hisoblash usullarini — Newton-Leybnits, bo'laklab integrallash, o'zgaruvchilarni almashtirish — turli xil misollar orqali mashq qilish. Misol murakkabligi asta-sekin oshirib borilishi kerak.

To'rtinchi bosqich — amaliy aloqa. Geometrik va fizik masalalarni yechish orqali talaba integralni abstrakt tushuncha emas, balki real hodisalar tavsiflovchi vosita sifatida qabul qiladi. GeoGebra yoki Desmos kabi kompyuter dasturlari grafik vizualizatsiya uchun samarali ko'mak beradi.

**7. XULOSA**

Ushbu maqolada aniq integralning nazariy asoslari, hisoblash usullari va amaliy tadbiqlari tizimli ravishda bayon etildi. Quyidagi asosiy xulosalar chiqarildi:

1) Aniq integral integral yig'indisi limiti sifatida ta'riflanib, Newton-Leybnits formulasi orqali samarali hisoblash imkoniyati yaratiladi. Bu formula differensial va integral hisobning markaziy bog'lanishini ifodalaydi.

2) Geometrik tadbiqlarda aniq integral egri chiziqli yuzalar, yoy uzunligi, aylanma jismlar hajmi va sirti kabi masalalarni analitik yechish imkonini beradi.

3) Fizik masalalar — o'zgaruvchan kuch ishi, inersiya momenti va og'irlik markazi — aniq integral vositasida to'liq analitik ko'rinishda ifodalanadi.

4) Mavzuni o'qitishda motivatsiyadan boshlab, nazariy asoslar, hisoblash ko'nikmalari va amaliy tatbiqlarni birlashtiruvchi bosqichma-bosqich yondashuv eng yuqori ta'lim samarasini ta'minlaydi.

Aniq integral faqat matematik bilim emas — u zamonaviy muhandis, fizik, iqtisodchi va pedagog uchun zarur amaliy vosita hisoblanadi. Shu sababli bu mavzuni oliy ta'limda sifatli o'qitish kelajak mutaxassislarini tayyorlashning muhim tarkibiy qismidir.

**FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR**

1. Azlarov T.A., Mansurov X. Matematik analiz asoslari. 1-qism. — Toshkent: Universitet, 2004. — 417 b.
2. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining PQ-2909-son Qarori, 2017-yil 20-aprel. — Toshkent, 2017.
3. Alimov Sh.O., Ashurov R.R. Matematik analiz. 1-qism. — Toshkent: Innovatsion rivojlanish nashriyot-matbaa uyi, 2018. — 328 b.
4. Turg'unboyev X., Hamidov A., Ashurov R. Matematik analiz. 1-2-qism. — Toshkent, 2005.
5. Salohiddinov M.S. Matematik analiz. O'quv qo'llanma. — Toshkent: O'zbekiston Milliy universiteti nashriyoti, 2005. — 360 b.
6. Sa'dullayev A. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami. 1-qism. — Toshkent: O'zMU nashriyoti, 2020.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. — Москва: Наука, 1966.
8. Демидович Б.П. Сборник задач по математическому анализу. — Москва: Наука, 1966.
9. Azlarov T.A., Mansurov H. Matematik analiz asoslari. 2-qism. 3-nashr. — Toshkent: Universitet, 2007. — 368 b.